Att uppskatta avståndet till randen av Mandelbrotmängden

Niels Möller

23 april 1995

Inledning

Definitioner och beteckningar

Sätt

$$f_c(x) = z^2 + c \tag{1}$$

där $c, z \in C$. Låt f_c^n beteckna f_c sammansatt med sig själv n gånger, så att till exempel $f_c^3(z) = (f_c \circ f_c \circ f_c)(z) = f_c(f_c(f_c(z)))$.

Mandelbrotmängden definieras som mängden av de c för vilka $\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ är begränsad;

$$M = \{c \ : \ f_c^n(0) \not\to \infty, \text{ då } n \to \infty\}$$

Man har visat att M är kompakt.

Beteckna skivan $\{z \ : \ |z - z_0| < r\}$ med $D(z_0, r)$, och låt $D = D(0,1)$ vara enhetsskivan. Vårt mål är att hitta uppskattningar så att vi till en punkt $c_0 \in M$ kan hitta en radie R, så att $D(c_0, R) \subset M$, och likadant för $c_0 \in M^C$

Vi kommer att behöva Möbiustransformationen

$$\begin{aligned} m_{z_0} &: D \to D \\ z &\to \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \quad , \text{där } z_0 \in D \end{aligned} \tag{2}$$

Vi har $m_{z_0}(z_0) = 0$ och $m_{z_0}(0) = -z_0$.

Köbes sats

Ett av de viktigaste verktygen är Köbes sats från funktionsteorin.
Antag att $\psi : D \to \Omega \subset C$ är analytisk och injektiv. Låt $\omega_0 = \psi(0)$.
Då gäller att $D\left(\omega_0, \frac{1}{4}|\psi'(0)|\right) \subset \Omega$.

Skivor inuti M

Periodicitet

f_c sägs ha en attraktiv cykel av period $p \geq 1$ om det finns något z_0 sådant att

$$\begin{cases} f_c^p(z_0) = z_0 & \text{det vill säga att } z_0 \text{ är en fixpunkt till } f_c^p \\ f_c^k(z_0) \neq z_0 & \text{för } 1 \leq k < p \\ |\rho| < 1 & \text{där } \rho = \frac{d}{dz} f_c^p(z)|_{z=z_0} \end{cases}$$

Man har visat att en attraktiv cykel till ett polynom måste attrahera minst en kritisk punkt. I vårt fall har $f_c(z)$ bara en kritisk punkt, nämligen $z = 0$. Vi har därför:

$$f_c(z) \text{ har en attraktiv cykel } \Longrightarrow c \in M$$

Låt $H = \{c \ : \ f_c(z) \text{har en attraktiv cykel}\}$. $H \subset M$, och H är öppen. Det är en öppen fråga om $M = \overline{H}$.

För $c_0 \in H$, låt Ω vara den komponent av H som innehåller c_0. För varje $c \in \Omega$ finns precis en attraktiv cykel, och deras respektive perioder är en och samma, vi kallar den p.

Avbildningen ρ_Ω

För varje $c \in \Omega$, låt z_0 vara en av punkterna i den attraktiva cykeln, och sätt $\rho = \frac{d}{dz} f_c^p(z)|_{z=z_0}$, som ovan. Notera att ρ inte beror av vilken av punkterna i cykeln vi väljer, eftersom ρ enligt kedjeregeln är produkten av derivatorna $\frac{d}{dz} f_c(z)$ utvärderade i samtliga punkter z i cykeln. Definiera

$$\begin{aligned} \rho_\Omega : \Omega &\to D \\ c &\to \rho \end{aligned}$$

ρ_Ω är analytisk, och man har visat att den är bijektiv, och går att utvidga kontinuerligt till en avbildning $\overline{\Omega} \to \overline{D}$.

Sätt nu $\omega_0 = \rho_\Omega(c_0)$, och betrakta avbildningen $\psi = m_{\omega_0} \circ \rho_\Omega$. ψ är en analytisk och bijektiv avbildning $\Omega \to D$, med $\psi(c_0) = 0$. Även inversen ψ^{-1} är analytisk och bijektiv, och uppfyller därför förutsättningarna i Köbes sats, så att

$$D\left(c_0, \frac{1}{4}\left|\frac{d}{d\omega}\psi^{-1}(0)\right|\right) \subset \Omega$$

Den sökta uppskattningen är alltså

$$R = \frac{1}{4}\left|\frac{d}{d\omega}\psi^{-1}(0)\right| = \frac{1}{4}\frac{1}{|\psi'(c_0)|}$$

där $\psi'(c_0) \neq 0$ eftersom ψ är inverterbar och c_0 är en inre punkt i definitionsområdet Ω.

Beräkning av R

För att räkna ut R behöver vi

$$\begin{aligned} \psi'(c_0) &= \frac{d}{dc}\left(m_{\omega_0} \circ \rho_0\right)(c_0) \\ &= m'_{\omega_0}(\omega_0) \cdot \frac{d}{dc}\left(\frac{d}{dz} f_c^p(z_0)\right)|_{c=c_0} \end{aligned} \tag{3}$$

Ur ekvation (2) fås

$$m'_{\omega_0}(\omega_0) = \frac{1}{1-|\omega_0|^2} = \frac{1}{1-\left|\frac{d}{dz} f_{c_0}^p(z_0)\right|^2}$$

I den andra faktorn i (3) måste man ta hänsyn till att z_0 beror av c;

$$\frac{d}{dc}\left(\frac{d}{dz} f_c^p(z_0)\right)|_{c=c_0} = \frac{\partial^2}{\partial c \partial z} f_c^p(z)|_{\substack{c=c_0\\ z=z_0}} + \frac{d^2}{dz^2} f_{c_0}^p(z_0)\frac{dz_0}{dc}|_{c=c_0}$$

Resultatet blir

$$R = \frac{1}{4}\frac{1-\left|\frac{d}{dz} f_{c_0}^p(z_0)\right|^2}{\left|\frac{\partial^2}{\partial c \partial z} f_c^p(z)|_{\substack{c=c_0\\ z=z_0}} + \frac{d^2}{dz^2} f_{c_0}^p(z_0)\frac{dz_0}{dc}|_{c=c_0}\right|} \tag{4}$$

För praktiskt bruk går det inte att bestämma z_0 och p exakt. Då kan man ta ett stort N, ersätta z_0 med $f_{c_0}^N(0)$, och ta det lägsta p som uppfyller $|f_c^p(z_0) - z_0| = |f_c^{N+p}(0) - f_c^N(0)| < \epsilon$. Sedan kan derivatorna i (4) bestämmas genom iteration av (1) p steg. Till exempel bestäms $\frac{d}{dz} f_{c_0}^p(z_0)$ genom

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} f_{c_0}^1(z_0) &= 2z_0 \\ \frac{d}{dz} f_{c_0}^m(z_0) &= \frac{d}{dz}\left(f_{c_0}^{m-1}(z_0)^2 + c\right) = 2 f_{c_0}^{m-1}(z_0) \cdot \frac{d}{dz} f_{c_0}^{m-1}(z_0) \end{cases}$$

Skivor utanför M

Greensfunktionen till M

Greensfunktionen för M ges av

$$G_M(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left|f_c^n(c)\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left|f_c^{n+1}(0)\right| \tag{5}$$

G_M är harmonisk, och därmed även kontinuerlig, på hela C. Dessutom gäller

$$\begin{gathered} G_M(c) \geq 0 \\ G_M(c) = 0 \iff c \in M \\ \frac{G_M(c)}{ln(c)} \to 1 \text{ då } c \to \infty \end{gathered}$$

Nu vill vi ha en analytisk funktion Φ_M sådana att $G_M(c) = ln|\Phi_M(c)|$ för $c \notin M$. Genom att välja gren i logaritmfunktionen omsorgsfullt kan man definiera

$$\Phi_M(c) = \lim_{n\to\infty}\left(f_c^{n+1}(0)\right)^{\frac{1}{2^n}} \tag{6}$$

Man har visat att Φ_M är en analytisk och bijektiv avbildning $M^C \to C - \overline{D}$. Φ_M utvidgas analytiskt till $M^C \cup \{\infty\}$ genom att sätta $\Phi_M(\infty) = \infty$.

Definiera $r(z) = \frac{1}{z}$. Låt $c_0 \notin M$ vara fixt, och sätt $\omega_0 = \frac{1}{\Phi_M(c_0)}$. Då blir $\phi = m_{\omega_0} \circ r \circ \Phi_M$ en analytisk och bijektiv funktion $M^C \to D$, med $\phi(c_0) = 0$. Köbes sats tillämpad på ϕ^{-1} ger nu att

$$D\left(c_0, \frac{1}{4}\frac{1}{|\phi'(c_0)|}\right) \subset M^C$$

Beräkning av R

Vi har

$$\phi'(c_0) = \frac{1}{1 - |\omega_0|^2} \cdot (-\omega_0^2) \cdot \Phi_M'(c_0) \tag{7}$$

Genom att derivera (6) fås

$$\Phi_M'(c) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{2^n} log\ f_c^{n+1}(0)} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial c} f_c^{n+1}(0)}{f_c^{n+1}(0)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_M(c_0)| &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{2^n} ln|f_{c_0}^{n+1}(0)|} \cdot \left| \frac{\frac{\partial}{\partial c} f_c^{n+1}(0)|_{c=c_0}}{f_{c_0}^{n+1}(0)} \right| \right\} \\
&= 2e^{G_M(c_0)} \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} \frac{\frac{\partial}{\partial c} f_c^n(0)|_{c=c_0}}{f_{c_0}^n(0)} \right\}
\end{aligned}$$

Om detta tillsammans med $|\omega_0| = \frac{1}{|\Phi_M(c_0)|} = e^{-G_M(c_0)}$ sätts in i (7) fås

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\phi'(c_0)|} &= \frac{e^{G_M(c_0)} - e_M^G(c_0)}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^n \left| \frac{f_c^n(0)}{\frac{\partial}{\partial c} f_c^n(0)|_{c=c_0}} \right| \\
&= sinh\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} ln|f_c^n(0)| \right) \cdot \lim_{n\to\infty} 2^n \left| \frac{f_c^n(0)}{\frac{\partial}{\partial c} f_c^n(0)|_{c=c_0}} \right|
\end{aligned}$$

$sinh\ x \geq x$ för $x \geq 0$ ger nu att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\phi'(c_0)|} &\geq \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} ln|f_c^n(0)| \cdot 2^n \left| \frac{f_c^n(0)}{\frac{\partial}{\partial c} f_c^n(0)|_{c=c_0}} \right| \right\} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{|f_c^n(0)|\ ln|f_c^n(0)}{\frac{\partial}{\partial c} f_c^n(0)}
\end{aligned}$$

Om vi väljer

$$R = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{|f_c^n(0)|\ ln|f_c^n(0)}{\frac{\partial}{\partial c} f_c^n(0)}$$

får vi en skiva utanför M, som önskat, ty

$$D(c_0, R) \subset D\left(c_0, \frac{1}{4}\frac{1}{|\phi'(c_0)|}\right) \subset M^C$$

Referenser

Jag har läst artiklarna

Bodil Branner: "The Mandelbrot Set" i boken "Chaos and Fractals. The Mathematics Behind the Computer Graphics", ed R. L. Devaney och L. Keen.

Yuval Fisher: "Exploring the Mandelbrot Set" i "The Science of Fractal Images", ed H. O. Peitgen och D. Saupe.

Bevis av de tyngre resultaten lär finnas i

H. Brolin: "Invariant sets under iteration of rational functions", Ark. Mat. 6 (1965), s 103-144

A. Doudy: "Systèmes dynamiques holomorphes", Sém. Bourbaki, 35e anné, #599, Asterisque 105-106, 1986, 161-173.

A. Doudy och J. H. Hubbard "Étude dynamique des polynômes complexes, I, II, Publ. Math. Orsay, 1984, 1985.